9/10/2016

Μαθημα 4ο

Διαφορικες Εξισωσεις

(A-16) $p, q : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $|p(x)| \geq |q(x)|$, $x \geq 0$.

(P) $y' + py = 0$ Αν ολες οι λυσεις της Q τεινουν προς το 0 για $x \to \infty$

(Q) $z' + pz = 0$ νδαν $p \to 0$, $x \to \infty$.

Λυση

$q = 1$, $z' + z = 0 \to z(x) = e^{-x} z(0)$

$p = -1$ $y' - y = 0 \to y(x) = e^{x} y(0)$.

Βρηκα ενα αντιπαραδειγμα, αρα η προταση δεν ισχυει!

(A-27) $y' = ay + b$, $a, b \in C([0, \infty))$

(ii) Αν $0 \leq k < a(x)$ & b : φραγμενη, νδο $\exists$ ακριβως μια που ειναι φραγμενη στ $[0, +\infty)$ και $y(x) = -\int_x^{\infty} b(s) e^{\int_s^x a(t)dt} ds$, $x \geq 0$

Λυση

Ενας τροπος ειναι να παραγωγισουμε την $y(x)$ και να παρουμε την αρχικη σχεση.

~~[illegible]~~ Β' τροπος:

$y(0) = \dots$, τοτε: $y(x) = e^{\int_0^x a(s)ds} \left[y(0) + \int_0^x b(s) e^{-\int_0^s a(u)du} ds \right]$

Αντικαθιστω το $y(0)$ που βρηκα και βρισκω το $y(x)$ που θελω.

Να τη λυσω!

Χωριζομενων μεταβλητων : $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x)}{Q(x)}$

πχ $(5y^4+3)y' = x$. Να λυθει η εξισωση.

λυση

$(5y^4+3)y' = x \Rightarrow (5y^4+3)\,dy = x\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \int 5y^4+3\,dy = \int x\,dx \Rightarrow y^5+3y = \frac{x^2}{2}+c$

β' τροπος :

$\int_{x_0}^{x} (5y^4+3)y'\,du = \int_{x_0}^{x} u\,du \Rightarrow$

$y^5(u)+3y(u)\Big|_{u=x_0}^{u=x} = \frac{u^2}{2}\Big|_{u=x_0}^{u=x} \Rightarrow y^5(x)+3y(x) - (y^5(x_0)-3y(x_0)) = \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2}$

Επομενως όλες οι λυσεις δινονται απο τον τυπο:

$$\boxed{y^5(x)+3y(x) = \frac{x^2}{2}+C}$$

$y' = e^{x-y}$. Να λυθει η διαφορικη εξισωση.

λυση

$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y} \Rightarrow e^y\,dy = e^x\,dx \Rightarrow \int e^y\,dy = \int e^x\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow e^y = e^x + c \Rightarrow y = \ln(x+c)$.

Να λυθεί το ΠΑΤ $(y+x^2y)y'=x$, $y(1)=0$

<u>Λύση</u>

$$y(1+x^2)y'=x \Rightarrow y(1+x^2)\frac{dy}{dx}=x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ydy=\frac{x}{1+x^2}dx \Rightarrow \int ydy=\int\frac{x}{1+x^2}dx \Rightarrow \frac{y^2}{2}=\frac{1}{2}\ln|1+x^2|+c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2(x)=\pm\sqrt{\ln(1+x^2)+c}$$

$$y(1)=0 \Rightarrow \pm\sqrt{\ln 2+c}=0 \Rightarrow c=-\ln 2$$

$$\&\quad y(x)=\pm\sqrt{\ln\frac{1+x^2}{2}}$$

<u>ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ</u>

Η $f:\Omega\to\mathbb{R}$ είναι ομογενής [illegible] εξίσωση βαθμού n, αν:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y).$$

– $y'=\frac{g(x,y)}{h(x,y)}$, με g,h ομογενείς <u>ίδιου βαθμού!</u>

$$\frac{g(x,y)}{h(x,y)}=\frac{g(x\cdot 1,\ xy\frac{1}{x})}{h(x\cdot 1,\ xy\frac{1}{x})}=\frac{x^n g(1,\frac{y}{x})}{x^n h(1,\frac{y}{x})} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{g(1,\frac{y}{x})}{h(1,\frac{y}{x})}}$$

Για $z=\frac{y}{x} \Rightarrow y=zx$, $y'=z'x+z$

Θα έχουμε: $z'x+z=\frac{g(1,z)}{h(1,z)} \Rightarrow xz'=\frac{g(1,z)}{h(1,z)}-z$

↳ χωριζομένων μεταβλητών.

πχ Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y' = \frac{x^3+y^2}{xy^2}$

Λύση

$g(x,y) = x^3 + y^3$

$g(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 x^3 + \lambda^3 y^3 = \lambda^3 (x^3 + y^3) = \lambda^3 g(x,y) \to$ g ομογενής $3^{ου}$ βαθμού

$h(\lambda x, \lambda y) = \lambda x \lambda^2 y^2 = \lambda^3 x y^2 = \lambda^3 P(x,y) \to$ h ομογενής $3^{ου}$ βαθμού.

(Η εξίσωση ΔΕΝ είναι γραμμική)

Θέτω $z = \frac{y}{x} \Leftrightarrow zx = y$, $y' = z + z'x$

Τότε θα έχουμε:

$$z'x + z = \frac{x^3\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3\right]}{x^3\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]} = \frac{1+z^3}{z^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z'x = \frac{1+z^3}{z^2} - z \Rightarrow \frac{1+z^3-z^3}{z^2} = \frac{1}{z^2} \Rightarrow z'z^2 = \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^2 dz = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \frac{z^3}{3} = \log x + c \Rightarrow z = \sqrt[3]{3(\log x + c)}$$

Να λυθεί το ΠΑΤ: $(x^3+y^2)dx + 2xy\,dy = 0$, $y(1) = -1$.

Λύση

$g(x,y) = x^3 + y^2 \to$ ομογενής β' βαθμού

$h(x,y) = 2xy \to$ ομογενής β' βαθμού.

{ Βρίσκουμε ΠΑΝΤΑ πεδίο ορισμού }

$$2xy\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \Rightarrow y\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2x} \Rightarrow y' = \frac{x^2+y^2}{2xy}$$

Θέτω $z = \frac{y}{x} \Rightarrow xz = y \Rightarrow z'x + z = y'$

$$z'x + z = -\frac{x^2+y^2}{2xy} \Rightarrow \frac{1+z^2}{2z} \Rightarrow z'x = \frac{1+3z^2}{2z} - z = \frac{1+3z^2}{2z} \Rightarrow \frac{2z}{1+3z^2}dz = -\frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{2z}{1+3z^2}dz = -\int \frac{1}{x}dx = \frac{1}{3}\log(1+3z^2) = -\log x + c \Rightarrow$$

$$(1+3z^2)^{1/3} = \frac{1}{x}c \Rightarrow y(x) = \pm\sqrt{\frac{c-x^3}{3x}} \Rightarrow y(x) = -\sqrt{\frac{4-x^3}{3x}}$$

Π.Ο. $\left\{ \begin{array}{l} (4-x^3)3x > 0 \\ \text{ισDy} \end{array} \right\}$

Να λυθεί το ΠΑΤ $\underbrace{x\sin\left(\frac{y}{x}\right)}_{g}dy = \left[\underbrace{x+y\sin\left(\frac{y}{x}\right)}_{h}\right]dx, \quad y(1)=0$

Λύση

Οι συναρτήσεις g, h είναι ομογενείς $1^{ου}$ βαθμού.

Θέτω $z=\frac{y}{x}$, $xz=y \Rightarrow y'=xz'+z$

Τότε η εξίσωση θα γίνει:

$$\sin\left(\frac{y}{x}\right)dy = \left[1+\left(\frac{y}{x}\right)\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1+z\sin z}{\sin z} = z'x+z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z'x\sin z + \cancel{z\sin z} = 1+\cancel{z\sin z} \Rightarrow z'x\sin z = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin z\,dz = \frac{dx}{x} \Rightarrow -\cos z = \log x + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \text{Arccos}\left[-\log|x| + c_1\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = x\,\text{Arcos}\left[-\log|x| + c\right]$$

$$y(1)=0 \Rightarrow 0 = \text{Arccos}(c) \Rightarrow c = \frac{\pi}{2}$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+\beta y+\gamma}{a_1x+\beta_1y+\gamma_1}$ Να λυθεί η διαφορική εξίσωση.

Λύση

Η εξίσωση δεν είναι ομογενής.

Η εξίσωση για να τη μετατρέψω σε ομογενή πρέπει να κάνω τον κατάλληλο μετασχηματισμό

$$\left.\begin{aligned} Y &= y+y_0 \\ X &= x+x_0 \end{aligned}\right\} \frac{ax+\beta y+\gamma}{a_1x+\beta_1y+\gamma} = \frac{a(X-x_0)+\beta(Y-y_0)+\gamma}{a_1(X-x_0)+\beta_1(Y-y_0)+\gamma_1} = \frac{aX+\beta Y+(ax_0+\beta y_0+\gamma)}{a_1X+\beta_1Y+(a_1x_0+\beta_1y_0+\gamma)}$$

$$\begin{aligned} ax_0+\beta y_0 &= \gamma \\ a_1x_0+\beta_1y_0 &= \gamma_1 \end{aligned}$$

$\underline{\pi\chi}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-x+y-3}{x+2y-3}$

<u>Λύση</u>

$$\left.\begin{array}{l} -x_0+y_0=3 \\ x_0+2y_0=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0=1 \\ y_0=-2 \end{array}\right.$$

Άρα $\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx}$: $\frac{dY}{dX} = \frac{-X+Y}{X+2Y}$ ομογενής

$z = \frac{Y}{X} \Rightarrow Y = Xz \Rightarrow Y' = Xz' + z$

Τότε θα έχουμε: $z + xz' = \frac{-1+\frac{Y}{X}}{1+2\frac{Y}{X}} = \frac{-1+z}{1+2z} \Rightarrow$

$\Rightarrow z'x = \frac{-1+z}{1+2z} - z = \frac{-1+z-z-2z^2}{1+2z} \Rightarrow$

$\Rightarrow x\frac{dz}{dX} = \frac{-2z^2-1}{1+2z} \Rightarrow \frac{1+2z}{-(1+2z^2)} = \frac{dx}{x}$

▸ <u>Άμεσα Ολοκληρώσιμες ΔΕ</u> $M(x,y)dy + N(x,y)dx = 0$.

Αν $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$ τότε $\exists F : Mdx + Ndy = dF$.

$\underline{\pi\chi}$ $(e^x+3y)dy + (3x+\cos y)dy = 0$. Να λυθεί η εξίσωση.

<u>Λύση</u>

$M(x,y) = e^x + 3y$

$N(x,y) = 3x + \cos y$

$\underbrace{\frac{\partial M}{\partial y} = 3, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3}$

$\Downarrow$

$\exists F : \Omega \to \mathbb{R}$ τω $\underline{dF = Mdy + Ndx}$

$F(x,y) = \int e^x + 3y\, dy + c \Rightarrow F(x,y) = ye^x + \frac{3y^2}{2} + h(x)$.

$\frac{\partial F}{\partial x} = ye^x + g'(x) \Rightarrow F(x,y) = ye^x + g(x) + c \Rightarrow g(x) = \frac{3y^2}{2}$.